数理解析研究所講究録
第 775 巻 1992 年 86-92

Twistor 理論入門

東京大学理学部　中島　啓　(Hiraku Nakajima)

twistor 理論は、Penrose [11]によって創始されて多くの数学者によっていろいろな場合に拡張されているが、ここでは四元数多様体の幾何に関連する部分のみについて解説を行ない、最近の結果を紹介する。なお筆者は twistor theory の専門家ではなく、むしろ twistor theory を用いないで四元数多様体を調べている。その理由は twistor theory は問題を代数幾何学の問題に置き換えるだけで、代数幾何に素養のない筆者にとって分からないものをより分からないものに移すだけであるからである。今後は、代数幾何に強い (もしくは代数幾何学者でももちろん良い) twistor theorist の登場が待たれる。

§ 1. quarternionic manifold とその twistor space の定義

まず quarternionic manifold の定義を与える。しかし、ここでは twistor space の almost complex structure の証明を与えないので、定義を理解できなくとも何の不都合もない。(意味をすぐに理解することは困難であろう。)

定義 (S.Salamon [14], L.Bérard Bergery [3]). $4n$ 次元 ($n \geq 2$) の C^∞ 多様体 X が*quarternionic manifold*であるとは、$\mathrm{End}(TX)$ の rank 3 の subbundle $\mathfrak{V}$ と torsion が消えている affine connection ∇ で $\mathfrak{V}$ を保つものが存在して、さらに各点 $x \in X$ に対しその近傍を U_x を充分に小さく取れば、$\mathfrak{V}|U_x$ の frame field I_x, J_x, K_x で $I_x^2 = J_x^2 = K_x^2 = -\mathrm{Id}$, $I_x J_x = -J_x I_x = K_x$ を満たすものが取れるときを言う。

このとき $\{I_x, J_x, K_x\}$ が orthonormal basis となるように $\mathfrak{V}$ に metric が定義できることを注意しておく。(x によらない。) また、この定義をそのまま $n = 1$ のときに適用しようとすると、I_x, J_x, K_x の存在は orientation と共形構造の存在と同値であり、torsion free connection の存在は常に成り立ってしまう。このままでは条件が弱すぎて何も言えない。そこで $n = 1$ のときには

定義. 4 次元 C^∞ 多様体 X が*quarternionic manifold*であるとは、X 上に orientation と共形構造が定義され、その Weyl tensor が anti-self-dual であるときを言う。

歴史的には、この $n = 1$ の時の定義の方が早く (そのときは quarternionic manifold とは呼ばれなかったが) M.F.Atiyah-N.J.Hitchin-I.M.Singer [2]による。また Weyl tensor と 2-form に働く Hodge star operator が metric の共形構造だけで決まることを注意しておく。

quarternionic manifold X に対して、$\mathfrak{V}$ の unit sphere bundle Z に次のように almost complex structure $\mathfrak{J}$ を定義して、twistor space という。

まず Z の点 p は、$x = \pi(p)$ における tangent space $T_x X$ に almost complex structure をさだめることを注意せよ。($p = aI_x + bJ_x + cK_x$ ($a^2 + b^2 + c^2 = 1$) とすると $p^2 = -\mathrm{Id}$ となることを見よ。) そこで P の tangent space $T_p Z$ を connection ∇ によって

$$T_p Z \cong T_p F \oplus \pi^* T_x X$$

と分解する。($T_p F$ は tangent space along the fiber である。) そこで $\pi^* T_x X$ 成分には p によって almost complex structure を入れ、$T_p F$ 成分には fiber を Riemann 球面と思って標準的な almost complex struture を入れることによって、$T_p Z$ に almost complex struture $\mathfrak{J}_p$ が定義される。

次の結果は、基本的である。

定理 ($n = 1$ のとき [2], $n \geq 2$ のとき [14, 3]). quarternionic manifold X の twistor space Z は complex manifold である。すなわち almost complex structure $\mathfrak{J}$ は integrable 。

G 構造の立場からの approach は L.Bérard Bergery-T.Ochiai [4]を参照のこと。

twistor space には、その構成から自然に real structure と呼ばれる anti-holomorphic involution $\tau : Z \to Z$ が

$$\tau(p) = -p, \qquad \text{for } p \in Z = S(\mathfrak{V})$$

によって定義される。さて上の定理の逆が言える。

定理 ($n = 1$ のとき [2], $n \geq 2$ のとき [14, 3]). complex manifold Z が

1) (C^∞ な意味での) $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$-fibration $\pi : Z \to X$ をもち、各 fiber は complex submanifold でその normal bundle は $\underline{\mathbb{C}^{2n}} \otimes \mathcal{O}(1)$ である。
2) free な anti-holomorphic involution $\tau : Z \to Z$ が定義されて、各 fiber を保つ。

を満たすとき X は quarternionic manifold の構造をもち、Z はその twistor space である。

これを使えば quarternionic manifold の例が与えられる。

例. 四元数射影空間 $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ は quaternionic manifold であり、その twistor space は $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1}$ である。projection $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1} \to \mathbb{H}\mathrm{P}^n$ は $\mathbb{C}^{2n+2}$ の一次元複素部分空間 L に対し、$\mathbb{H}^{n+1}$ の中で L が生成する一次元四元数部分空間を対応させる写像である。ただし、$\mathbb{C}^{2n+2}$ と $\mathbb{H}^{n+1}$ は同一視される。real structure は L に対して $Lj = \{zj \in \mathbb{C}^{2n+2} \mid z \in L\}$ を対応させればよい。

twistor 理論の一番の応用は S^4 上の instanton の分類であろう。次にこれを説明する。E を quarternionic manifold X 上の hermitian metric をもった complex vector bundle とす

る。 E 上の connection A が anti-self-dual connection であるとは、その曲率 R_A が

$$R_A(I_xv, I_xw) = R_A(J_xv, J_xw) = R_A(K_xv, K_xw) = R_A(v, w) \qquad \text{for } x \in X,\ v, w \in T_xX$$

を満たすときを言う。 X が四次元のときにはこの定義は通常のものと一致する。

定理 ($n = 1$ のとき [2], $n \geq 2$ のとき [14, 3]). vector bundle E と anti-self dual connection A を projection π によって twistor space に引き戻すと、holomorphic structure を定める。すなわち pull-backed connection (これも A で表す。) に associate した exterior differential operator d_A を考え、その $(0,p)$ 成分をとることにより、Dolbeaux operator $\overline{\partial}_A$: $\Omega^{0,p}(\pi^*E) \to \Omega^{0,p+1}(\pi^*E)$ を定義すると、$\overline{\partial}_A\,\overline{\partial}_A = 0$ が成り立つ。さらに π^*E にこのように holomorphic structure を定義して holomorphic vector bundle と思ったものを $\mathcal{F}$ と書くことにすると、その性質として 1) $\mathcal{F}$ は各 fiber に制限すると trivial である。2) (E の hermitian metric を使うことにより) $\tau^*\overline{\mathcal{F}}$ と $\mathcal{F}^*$ の間に holomorphic isomorphism σ が存在する。さらに σ により $\mathcal{F}$ の各 fiber 上の section のなす vector space (これは E_x に他ならない。) に二次形式を定義すると、positive definite な hermitian inner product になる。逆に Z 上の holomorphic vector bundle $\mathcal{F}$ が 1), 2) を満たせば、X 上の hermitian vector bundle と anti-self-dual connection から来る。

この結果を用いて M.F.Atiyah-V.G.Drinfeld-N.J.Hitchin-Yu.I.Manin [1]は $S^4 = \mathbb{HP}^1$ 上の anti-self-dual connection の分類を行なった。 $\mathbb{CP}^3$ 上の holomorphic vector bundle に対して代数幾何的なテクニックを用いることによって得られる。

同様の結果は、Buchdahl [5]によって $\overline{\mathbb{CP}^2}$ (複素射影平面の複素多様体としての向きを逆にしたもの) 上の anti-self-dual connection の分類が得られている。

あとの都合で quarternionic Kähler manifold と呼ばれるものも導入しておく。

定義 (S.Salamon [14], L.Bérard Bergery [3]). $4n$ 次元 ($n \geq 2$) の quarternionic manifold X が*quarternionic Kähler manifold*であるとは、I_x, J_x, K_x が hermitian になるような Riemannian metric g があって、quarternionic manifold の定義にある torsion free connection が g の Levi-Civita connection で与えられるときを言う。 4 次元のときには、oriented Riemanian manifold で anti-self-dual Weyl tensor をもち、さらに Einstein であるときをいう。

一般次元のときにも Riemannian metric g は Einstien であることが示される。そこで scalar curvature の符号によって positive, zero, negative なものに分かれる。

例 (Wolf space [15]). $\mathfrak{g}$ を compact simple な Lie algebra 、 $\mathfrak{t}$ を Cartan subalgebra, α を heighest root とする。root β に対して

$$\mathfrak{g}_\beta = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = 2\pi i\beta(H)X \quad \text{for all } H \in \mathfrak{t}\}$$

とおく。Lie algebra が $\mathfrak{g}$ となる simply connected Lie group を G 、

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \bigoplus_{(\alpha,\beta)=0} \mathfrak{g}_\beta$$

に対応する Lie subgroup を K とする。このとき G/K は quarternioni Kähler manifold of positive scalar curvature である。その non-compact dual は quarternionic Kähler manifold of negative scalar curvature である。

§ 2. 最近の話題から

最近次のような驚くべき結果が得られた。

定理 (Y.S.Poon-S.Salamon [13]). 8 次元の compact quarternionic Kähler manifold で positive scalar curvature をもつものは、Wolf space に限る。

ちなみに任意の次元で、Wolf space 以外の compact quarternionic Kähler manifold with positive scalar curvature は見つかっていない。上の定理は次の定理の高次元への拡張と考えられる。

定理 (N.J.Hitchin [8]). 4 次元の quarternionic manifold でその twistor space が Kähler metric を持ちえるのは、S^4 と $\overline{\mathbb{C}\mathrm{P}^2}$ だけである。

quarternionic Käher manifold で postive scalar curvature を持つものの twistor space は Kähler(より強く projective) であることが示されることに注意。Y.S.Poon-S.Salamon の定理の証明は恐ろしく technical なので省略することにする。(代数幾何を full に使う。) Hitchin の証明は、現在知られている Fano 3-fold の分類を用いればすぐに出来る。これを紹介しよう。

まず、4 次元の quarternionic manifold の twistor space の一般的な性質として次が成り立つ。

1) $H^*(Z;\mathbb{R})$ は free $H^*(X;\mathbb{R})$-module generated by $c_1(T_F)$ であり、$c_1(T_F)^2 = (2\chi + 3\tau)[X] \in H^3(X;\mathbb{R})$ を満たす。但し、T_F は tangent bundle along fibers 、ξ は X の Euler 数、τ は X の signature 、$[X]$ は X の fundamental class である。

2) real structure τ が cohomology $H^*(Z;\mathbb{R})$ に induce する map τ^* を考えると、$c_1(T_F)$ は -1 倍され、$H^*(X;\mathbb{R})$ の元は動かさない。
3) Z の canonical bundle K は $T_F^{\otimes 2}$ である。(T_F は holomorphic vector bundle になる。)
4) $c_2(Z) = (3\chi + 3\tau)[X]$, $c_3(Z) = 4\chi c_1(T_F)[X]$
5) $H^0(Z;K^m) = 0$ for $m > 0$. よって特に Z の小平次元は 0 である。
6) Z 上 non-zero holomorphic p-form ($p > 0$) は存在しない。

Z が Kähler metric を持つと仮定し、ω を Kähler form としよう。ω は positive form であり、$\tau^*\omega$ は negative form である。その cohomology class $[\omega] \in H^2(Z;\mathbb{R}) = \mathbb{R}c_1(T_F) \oplus H^2(X;\mathbb{R})$ を考えると、τ^* が第一成分に -1、第二成分に 1 で働くことから $[\omega] \in \mathbb{R}c_1(T_F)$ である。T_F は real line に制限すると $\mathcal{O}(2)$ であり、よって $T_F = K^{-1/2}$ は ample、だから Z は Fano 3-fold of index 2 or 4 である。

次に Z の Hodge number $h^{p,q}$ と Betti 数 b_i を計算する。まず 6) より、$b_1 = h^{1,0} + h^{0,1} = 2h^{1,0} = 0$ が成り立つ。次に Riemann-Roch と 6) を使うと

$$c_1c_2/24 = \sum(-1)^p h^{p,0} = h^{0,0} = 1$$

一方 2) より $c_1c_2/24 = (\chi + \tau)/2$ であり、$b_1 = b_1(X)$、$b_2 = b_2(X) + 1$ を用いると、$c_1^3 = 16(2\chi + 3\tau) = 16(5 - b_2)$ が従う。よって特に、$1 \le b_2 \le 4$ である。ここで Ishkovski の Fano 3-folds of index ≥ 2 の分類を使うと、$b_2 = 1$ のときは $Z = \mathbb{C}P^3$、$b_2 = 2$ のときは smooth divisior on $\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$ of bidegree $(1,1)$ であり、$b_2 = 3, 4$ はあり得ないことが分かる。これから、$b_2 = 1$ のとき $X = S^4$、$b_2 = 2$ のとき $X = \overline{\mathbb{C}P^2}$ が従う。

次に Hitchin の定理の仮定を弱めることを考える。

定理 (F.Campana [6]). 4 次元 compact quarternionic manifold X の twistor space が、藤木の Class C ならば X は $\overline{\mathbb{C}P^2}$ の n 個の connected sum か S^4 に homeo である。

証明の Key は、$\pi_1(X) = 1$ を示すことにある。実際、Hitchin の証明のときの議論から X の intersection form は negative definite であることが分かるので、$\pi_1(X) = 1$ が言えれば、Donaldson の結果と Freedman の結果をあわせて定理が言える。

Campana の結果が sharp であることは、次から分かる。

定理 (C.LeBrun [9]). 任意の $n \ge 1$ に対し $\overline{\mathbb{C}P^2}$ の n 個の connected sum の上に twistor space が Moishezon である quarternionic manifold の構造が入る。

C.LeBrun の構成は具体的であり、Gibbons-Hawking ansatz の hyperbolic monopole version を用いる。twistor space の具体的な表示も可能である。$n = 2$ の時には Y.S.Poon [12]

による twistor space の構成が知られていた。これは全く違う構成法であったが、C.LeBrun のものと一致することが示される。Gibbons-Hawking ansatz の hyperbolic monopole version を簡単に説明しよう。

U を hyperbolic 3-space の open subset とし、U 上の S^1-bundle P 上の hyperbolic monopole (A, Φ) が存在するとする。すなわち A は P の connection であり、Φ は P の adjoint bundle の section であり、次の方程式が満たされる。

$$*R_A = d_A \Phi$$

さらに U 上で ($U(1)$ の Lie 環を $\mathbb{R}$ と同一視したときに) Φ は everywhere positive と仮定する。hyperbolic space を上半空間表示し、metric を

$$h = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

と表す。そこで P 上に metric を

$$g = z^2(\Phi h + \Phi^{-1}\omega^2)$$

で定める。

命題 (C.LeBrun [9]). metric g は Kähler で、scalar curvature は 0 である。特にその Weyl tensor は anti-self-dual である。

例えば U を hyperbolic space 全体にとり、Φ を constant 、A を trivial connection に取れば、得られる空間は $\mathbb{R}^4$ と Euclidean metric になる。LeBrun は、U を hyperbolic space から有限個の点 $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ を除いた空間にとり、P を c_1 が各点の回りの小さな球面で積分して -1 になるようにとった。Φ を Green function $G(p, q)$ をつかって

$$\Phi(p) = 1 + \sum_{i=1}^{n} G(p_i, q)$$

によって定める。このとき P 上の connection A を (A, Φ) が monopole になるように取ることが出来て、上の命題により Kähler metric with zero scalar curvature が定義される。このとき、smooth な completion を作ることができて、$\mathbb{C}^2$ の一つの複素直線に乗った n 点での blow-up 上の Kähler metric になる。さらに無限遠点を加えて metric を共形変換すれば $\overline{\mathbb{C}\mathrm{P}}^2$ の n 個の connected sum の上に quarternionic manifold の構造が定義される。

さらに $n \geq 4$ のときには、陰関数定理によって上の様に作った $\mathbb{C}^2$ の n 点 blow-up 上の Kähler metric を perturb することが出来て、n 点が一つの複素直線の充分小さい近傍に入っているときにも Kähler metric with zero scalar curvature を作ることができる。このとき conformal compactification の twistor space は藤木の class $\mathcal{C}$ ではなくなる。よって次を得る。

定理 (F.Campana-C.LeBrun-Y.S.Poon, see [7]). Moishzeon 3-fold でその deformation neighbourhood をいかに小さくとっても、藤木の class $\mathcal{C}$ に入らない空間を含んでしまうものが構成できる。

Kähler のときには、その small deformation はやはり Kähler であるから、上の結果は驚きである。

文献

[1] Atiyah, M. F., Drinfeld, V., Hitchin, N. J. and Manin, Y. I., *Construction of instantons*, Phys. Lett. **65A** (1978), 185–187.

[2] Atiyah, M.F., Hitchin, N. J. and Singer, I. M., *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. R. Soc. London Ser. A. **362** (1978), 425–461.

[3] Bérard Bergery, L., *Variétés quarternionniennes*, unpublished.

[4] Bérard Bergery, L. and Ochiai, T., *On some generalizations of the construction of twistor spaces*, in "Global Riemannian geometry," Ellis Horwood, 1984, pp. 52–58.

[5] Buchdahl, N. P., *Instantons on* $\mathbb{CP}^2$, J. Diff. Geom. **24** (1986), 19–52.

[6] Campana, F., *On twistor spaces in the class* C, J. Diff. Geom. (to appear).

[7] ————, *The class* C *is not stable by small deformation*, Math. Ann. **290** (1991), 19–30.

[8] Hitchin, N. J., *Kählerian twistor space*, Proc. Lond. Math. Soc. **43** (1981), 133-150.

[9] LeBrun, C., *Explicit self-dual metrics on* $\mathbb{CP}^2\#\dots\#\mathbb{CP}^2$, J. Diff. Geom. (to appear).

[11] Penrose, R., *Nonlinear gravitons and curved twistor theory*, Gen. Relativity Gravitaion **7** (1976), 31–52.

[12] Poon, Y.S., *Compact self-dual manifolds with positive scalar curvature*, J. Diff. Geom. **24** (1986), 97–132.

[13] Poon, Y. S. and Salamon, S. M., *Quarternionic Kähler 8-manifolds with positive scalar curvature*, J. Diff. Geom. **33** (1991), 363–378.

[14] Salamon, S. M., *Quarternionic structures and twistor spaces*, in "Global Riemannian geometry," Ellis Horwood, 1984, pp. 65–74.

[15] Wolf, J. A., *Complex homogeneous contact manifolds and quarternionic symmetric spaces*, J. Math. Mech. **14** (1965), 1033-1047.